**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot \cos(x^2 + 1)$.

(2 VP)

**Aufgabe 2**

Berechnen Sie das Integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

(2 VP)

**Aufgabe 3**

Lösen Sie die Gleichung $(x^2 - 2) \cdot (e^x + 1) = 0$.

(2 VP)

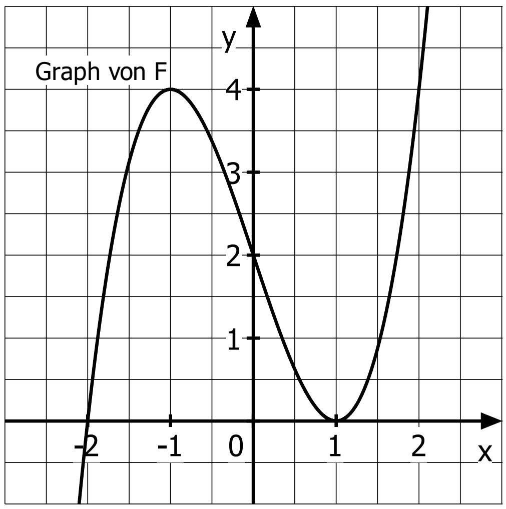
**Aufgabe 4**

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f .
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $f'$ besitzt im Bereich $-1 \le x \le 1$ eine Nullstelle.

(3) $f\left(F(-2)\right) > 0$




(4 VP)

## Aufgabe 5

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

(3 VP)

## Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.

b) Berechnen Sie den Abstand von g und E.

c) Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an E.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

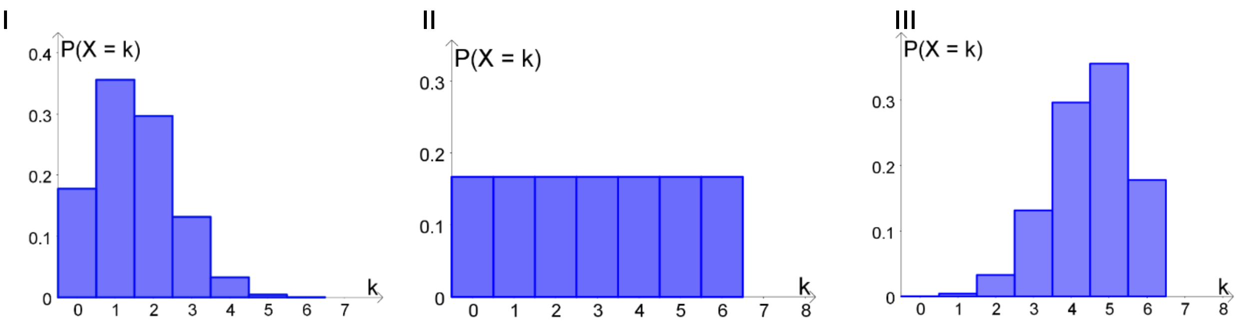
(4,5 VP)

## Aufgabe 7

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen X dar:




Geben Sie an, welche Abbildung dies ist.
Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(2,5 VP)

**Aufgabe A 1.1**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 2e^{-x}$. Ihr Graph ist K.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.
Untersuchen Sie f rechnerisch auf Monotonie.
Skizzieren Sie K.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, unter dem K die x-Achse schneidet.

(6 VP)

b) Die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen eine nach rechts offene Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt.

(3 VP)

c) Der Graph K* entsteht durch Spiegelung von K an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der zu K* gehörenden Funktion f*.

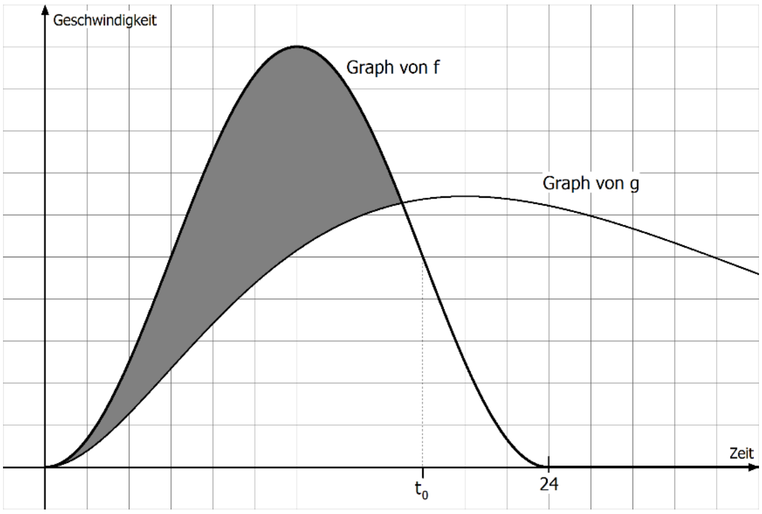
(2 VP)

d) Eine Parabel zweiter Ordnung berührt den Graphen K im Punkt $S(0\,|\,4)$ und hat ihren Scheitel auf der Geraden mit der Gleichung $y = 5$.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel.

(4 VP)

## Aufgabe A 1.2

Die Funktionen f und g beschreiben die Geschwindigkeiten zweier Fahrzeuge F und G in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, f(t) und g(t) in Meter pro Sekunde). Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt. Die beiden Fahrzeuge starten zum Zeitpunkt $t = 0$ nebeneinander und fahren in dieselbe Richtung.




a) Beschreiben Sie die Bewegung von Fahrzeug F in den ersten 24 Sekunden nach dem Start.
Die Stelle $t_0$ ist eine Wendestelle des Graphen von f.
Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang.

(2 VP)

b) Deuten Sie den Inhalt der markierten Fläche im Sachzusammenhang.
Gegeben ist die Gleichung $\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^{24} f(t)\,dt$ .
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

(3 VP)

**Aufgabe A 2.1**

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an.
Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

I $\quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100, \qquad a \in \mathbb{R}$

II $\quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100, \qquad b \in \mathbb{R}$

(5 VP)

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(3,5 VP)

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

(4,5 VP)

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(4,5 VP)

**Aufgabe A 2.2**

Für jedes $c > 0$ ist eine Funktion $h_c$ mit $h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ gegeben.

Eine Nullstelle von $h_c$ ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet.
Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an.
Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von $h_c$ für $0 \leq x \leq u$ mit der x-Achse einschließt.

(2,5 VP)

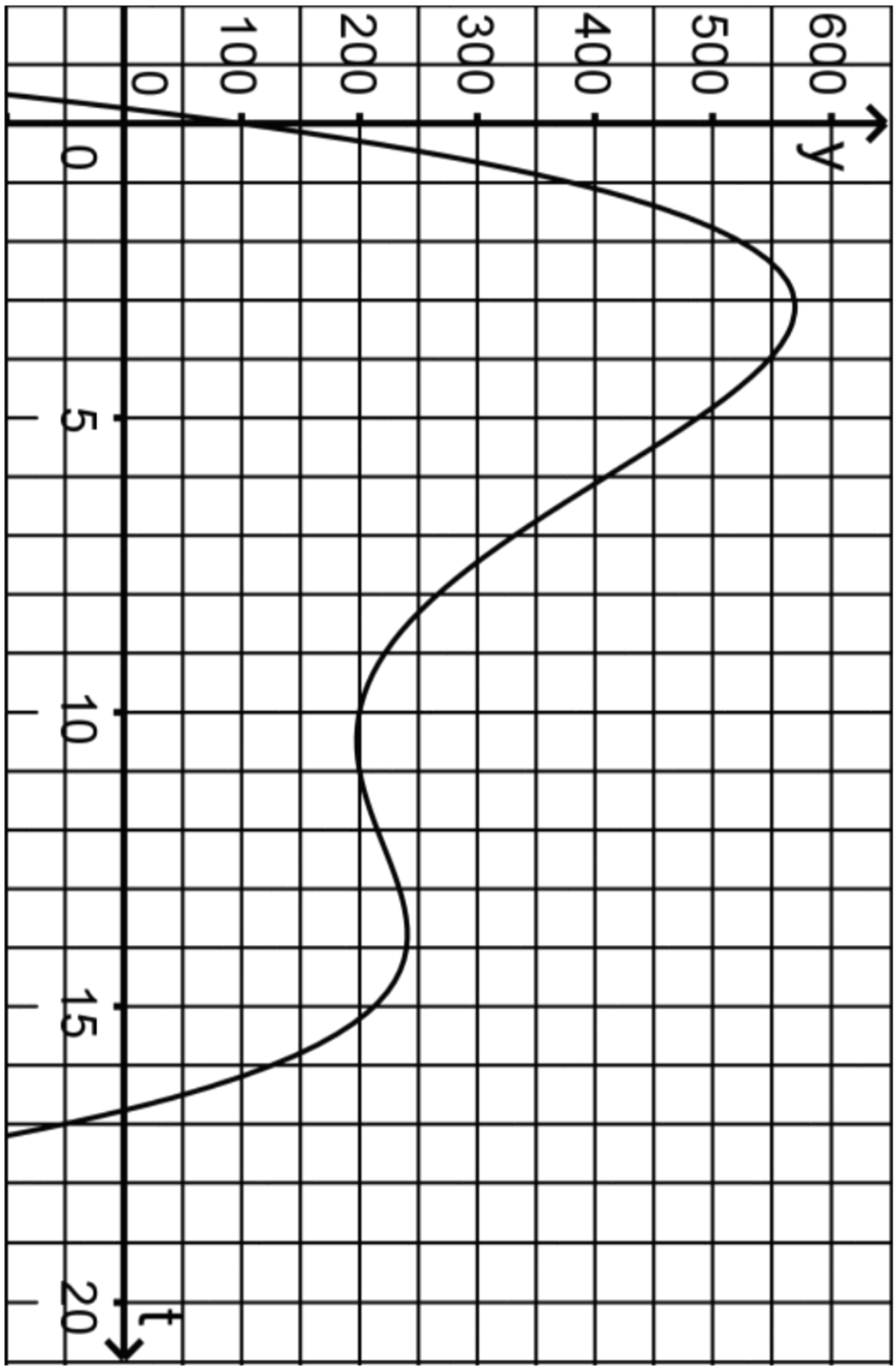
**Zu- und Vorname:** ____________________________

Chiffre der Schule | Chiffre des Schülers

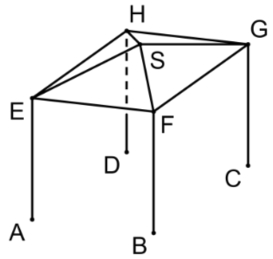
**Prüfungsfach:** ____________________________

Chiffre der Schule | Chiffre des Schülers

**Abbildung zu Aufgabe A 2.1**



Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden. In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten modellhaft durch die Punkte $A(2\,|\,-3\,|\,-0{,}5)$, B, C und $D(-3\,|\,-2\,|\,-0{,}5)$ sowie $E(2\,|\,-3\,|\,4)$, $F(3\,|\,2\,|\,4)$, $G(-2\,|\,3\,|\,4)$ und $H(-3\,|\,-2\,|\,4)$ dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0\,|\,0\,|\,5)$. Dabei beschreibt die $x_1x_2$-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.




a) Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.
Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

(4 VP)

b) An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird.
Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

(2 VP)

c) Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte.
Berechnen Sie das Verhältnis der Längen dieser beiden Abschnitte.

(2,5 VP)

d) Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der $x_1x_2$-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch die Strecke AE dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch die Strecke BF dargestellt wird.
Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

(1,5 VP)

Gegeben sind die Punkte $A(6\,|\,1\,|\,0)$, $B(4\,|\,5\,|\,-4)$ und $C(-2\,|\,8\,|\,2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.
Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten von D.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks 54 FE beträgt.
(Teilergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$)

(5 VP)

b) Es gibt Pyramiden mit der Grundfläche ABCD, die das Volumen 108 VE haben.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze einer solchen Pyramide.

(2,5 VP)

c) Ein Teil der Fläche des Rechtecks ABCD befindet sich unterhalb der $x_1x_2$-Ebene.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Teilfläche.

(2,5 VP)

Die Firmen A und B stellen Lampen her und liefern diese anschließend an Händler aus. Der Anteil defekter Lampen unter ausgelieferten Lampen der Firma A beträgt im Mittel 9 %, unter ausgelieferten Lampen der Firma B im Mittel 7 %. Im Folgenden soll sowohl für die Lampen der Firma A als auch für die Lampen der Firma B angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

a) Betrachtet werden Lampen, die von der Firma A ausgeliefert wurden.
Zehn Lampen werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens sechs Lampen nicht defekt sind.
500 Lampen werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweicht.

(3 VP)

b) Einem Händler werden Lampen geliefert, die in Kartons verpackt sind; jeder Karton enthält 30 Lampen. Der Händler wählt aus jedem Karton zwei Lampen zufällig aus und prüft diese. Sind bei einem Karton die beiden ausgewählten Lampen nicht defekt, so nimmt er diesen Karton an, ansonsten nicht.
Ein Karton enthält sechs defekte Lampen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt.
Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50 % beträgt.

(3,5 VP)

c) Ein Discounter bezieht 35 % der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65 % von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft: Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt.
Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters.

(3,5 VP)

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

| | |
|---|---|
| 1-Personen-Haushalte | 40,5 % |
| 2-Personen-Haushalte | 34,5 % |
| 3-Personen-Haushalte | 12,5 % |
| 4-Personen-Haushalte | 9,2 % |
| Haushalte mit mindestens 5 Personen | 3,3 % |

a) Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt.“
B: „Mindestens die Hälfte der ausgewählten Haushalte waren Mehrpersonenhaushalte.“
C: „Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt und unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte.“

(3,5 VP)

b) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind.

(2 VP)

c) Im Jahr 2013 lebten in Deutschland insgesamt etwa 80 Millionen Menschen. Bestimmen Sie für das Jahr 2013 einen Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(2 VP)

d) Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % die Nullhypothese

$H_0$: „Der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte beträgt höchstens 40,5 %.“

getestet werden.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 VP)

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer
Die Lösungshinweise erheben nicht den Anspruch, die einzigen oder kürzesten Lösungswege aufzuzeigen.
Sie sollen unter anderem eine Orientierungshilfe bei der Auswahl der Aufgaben durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer sein. Maßgebend für die Korrektur ist allein der Aufgabentext und jede nach diesem Text mögliche Lösung.

## Zum Pflichtteil

### Aufgabe 1

$f'(x) = 3\cdot\cos(x^2+1) - 6x^2\cdot\sin(x^2+1)$ (2 VP)

### Aufgabe 2

$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left[2\cdot\sqrt{x-1}\right]_2^5 = 2$ (2 VP)

### Aufgabe 3

$(x^2-2)\cdot(e^x+1)=0$ gilt wegen $e^x+1>0$ genau dann, wenn $x^2-2=0$.
Damit ergeben sich die Lösungen $x_1=-\sqrt{2}$ und $x_2=\sqrt{2}$. (2 VP)

### Aufgabe 4

(1) Die Aussage ist wahr: Dem Graphen lässt sich $F(1)=0$ entnehmen. Da $x=1$ außerdem eine Minimumstelle von F ist, gilt $f(1)=F'(1)=0$. (1,5 VP)
(2) Die Aussage ist wahr: Der Graph von F besitzt in diesem Bereich eine Wendestelle. (1 VP)
(3) Die Aussage ist falsch: Dem Graphen lässt sich $f(F(-2))=f(0)<0$ entnehmen. (1,5 VP)

### Aufgabe 5

$L=\{(-3+7t\,;\,3-t\,;\,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ (2 VP)

Das Gleichungssystem stellt drei Ebenen im Raum dar, die Lösungsmenge stellt die gemeinsame Schnittgerade der drei Ebenen dar. (1 VP)

### Aufgabe 6

a) $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E, $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Geraden g. Da $\overrightarrow{n_E}\cdot\vec{u}=2-2+0=0$, verläuft g parallel zu E. (1 VP)

b) $d(g,E)=\frac{|2\cdot(-2)-4+2\cdot4-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$ (1,5 VP)

c) Hilfsgerade k durch $P(-2\,|\,4\,|\,4)$, orthogonal zu E: $k:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Schnitt von k mit E: $2\cdot(-2+2t)-(4-t)+2\cdot(4+2t)=9$ führt zu $t=1$

$\overrightarrow{OP^*}=\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ (2 VP)

**Aufgabe 7**

a) $0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$ (1 VP)

b) Abbildung I zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Abbildung II zeigt eine Gleichverteilung, X ist jedoch binomialverteilt.
Der Erwartungswert von X ist $6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Die in Abbildung III gezeigte Verteilung besitzt einen größeren Erwartungswert. (1,5 VP)

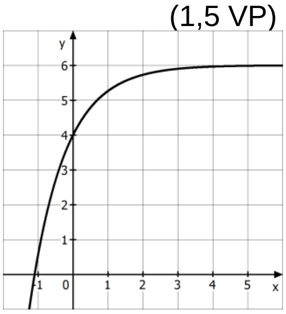
**<u>Zum Wahlteil</u>**

**Aufgabe A 1.1**

a) <u>Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen</u> (2 VP)
$f(0) = 4$, somit ist $S_y(0\,|\,4)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = -\ln(3)$, somit ist $S_x(-\ln(3)\,|\,0)$ der Schnittpunkt mit der x-Achse.

<u>Gleichung der Asymptote</u> (0,5 VP)
$y = 6$

<u>Monotonie</u> (1,5 VP)
$f'(x) = 2e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, somit ist f streng monoton steigend.




<u>Skizze</u> (1 VP)
siehe Abb. rechts

<u>Winkel</u> (1 VP)
$f'(-\ln(3)) = 6$, also $\tan\alpha = 6$ und somit $\alpha \approx 80{,}5°$

b) <u>Flächeninhalt</u> (3 VP)

$$A = \lim_{u\to\infty} \int_0^u (6 - f(x))\,dx = \lim_{u\to\infty} \left[-2e^{-x}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty} \left(-2e^{-u} + 2\right) = 2$$

c) <u>Gleichung von f*</u> (2 VP)
K* entsteht, indem man K um 1 LE nach unten verschiebt, danach an der x-Achse spiegelt und schließlich wieder um 1 LE nach oben verschiebt:
$f^*(x) = -(f(x) - 1) + 1 = 2 - f(x) = 2e^{-x} - 4$

d) <u>Gleichung der Parabel</u> (4 VP)
Ansatz: $y = a(x - b)^2 + 5$, $a \neq 0$ und $b \neq 0$
Punktprobe mit $S(0\,|\,4)$ führt zu $4 = ab^2 + 5 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{b^2}$. Vergleich der Tangentensteigungen in $S(0\,|\,4)$ führt zu $f'(0) = -2ab = 2 \Leftrightarrow 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1$ und somit $a = -1$.
Gleichung der Parabel: $y = -(x - 1)^2 + 5$

**Aufgabe A 1.2**

a) Beschreibung der Bewegung (1 VP)
Das Fahrzeug F beschleunigt zunächst und bremst dann wieder ab, um nach 24 Sekunden zum Stillstand zu kommen.
Bedeutung der Wendestelle (1 VP)
Die Stelle $t_0$ ist der Zeitpunkt, zu dem das Fahrzeug F am stärksten bremst.

b) Deutung des Flächeninhalts (2 VP)
Der Inhalt der Fläche entspricht dem maximalen Vorsprung, den das Fahrzeug F während der Fahrt gegenüber dem Fahrzeug G hat.

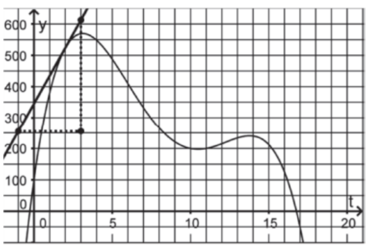
Frage im Sachzusammenhang (1 VP)
Zu welchem Zeitpunkt hat das Fahrzeug G denselben Weg zurückgelegt, den das Fahrzeug F innerhalb der ersten 24 Sekunden zurücklegt?

**Aufgabe A 2.1**

a) Volumen des Wassers (0,5 VP)
Dem Graphen entnimmt man, dass das Volumen fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn etwa 490 $m^3$ beträgt.

Zeitraum (1 VP)
Dem Graphen entnimmt man, dass das Wasservolumen im Zeitraum von etwa 0,9 Stunden bis etwa 6,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn mindestens 350 $m^3$ beträgt.

Momentane Änderungsrate (2 VP)




$$f'(2) \approx \frac{360}{4} = 90$$

Die momentane Änderungsrate zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa 90 $m^3$ pro Stunde.

Begründung (1,5 VP)
Hätte die Funktionsgleichung von f die Form I, dann müsste der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse sein.
Hätte die Funktionsgleichung von f die Form II, dann besäße der Graph von f höchstens zwei Extremstellen, da f eine ganzrationale Funktion dritten Grades wäre.

b) Verfahren (1,5 VP)
Man zeichnet die Tangente an den Graphen von f im Punkt P(15|f(15)) ein. Die Stelle, an der diese Tangente die x-Achse schneidet, stellt den gesuchten Zeitpunkt dar.

Interpretation (1,5 VP)
Die Lösungen der Gleichung beschreiben Zeitpunkte, in denen das Becken 350 $m^3$ mehr Wasser enthält als sechs Stunden später.

Lösung (0,5 VP)
Eine Lösung ist beispielsweise $t \approx 4$.

c) Zeitpunkt (2,5 VP)
$g'(t) = 0{,}4 \cdot \left(6t^2 - 78t + 180\right)$, die notwendige Bedingung $g'(t) = 0$ führt zur Gleichung

$t^2 - 13t + 30 = 0$ mit den Lösungen $t_1 = 3$ und $t_2 = 10$.
Wegen $g(0) = 0$, $g(3) = 97{,}2$, $g(10) = -40$ und $g(15) = 270$ ist die Änderungsrate zum Zeitpunkt 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.

Zeitraum (2 VP)
$g(t) = 0 \Leftrightarrow t \cdot \left(2t^2 - 39t + 180\right) = 0$. Lösungen sind $t_3 = 0$, $t_4 = 7{,}5$ und $t_5 = 12$.
Wegen $g(3) = 97{,}2$, $g(8) = -12{,}8$ und $g(15) = 270$ nimmt das Wasser im Zeitraum zwischen 7,5 Stunden und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ab.

d) Volumen (2 VP)

$$350 = V_0 + \int_0^3 g(t)\,dt \Leftrightarrow V_0 = 350 - \int_0^3 g(t)\,dt = 350 - \left(G(3) - G(0)\right) = 150{,}2$$

Zu Beobachtungsbeginn betrug das Wasservolumen etwa 150 $m^3$.

Zeitpunkt gleiches Wasservolumen (2,5 VP)
Es muss ein a mit $0 < a \le 15$ geben mit $\int_0^a g(t)\,dt = 0$. Dies führt auf die Gleichung

$a^4 - 26a^3 + 180a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot \left(a^2 - 26a + 180\right) = 0$. Die einzige Lösung ist $a_1 = 0$.

Es gibt also keinen solchen Zeitpunkt.

**Aufgabe A 2.2**

Wert von u (0,5 VP)

$$u = \frac{\pi}{c}$$

Flächeninhalt (2 VP)

$$A = \int_0^u c\sin(cx)\,dx = \left[-\cos(cx)\right]_0^u = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

**Aufgabe B 1**

a) Nachweis des Quadrats (2 VP)

Es ist $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, also ist EFGH ein Parallelogramm.

Wegen $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{FG}|$ und $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$ ist EFGH ein Quadrat.

Koordinatengleichung von L (2 VP)

Aus $\overrightarrow{n_L} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{n_L} \cdot \overrightarrow{ES}$ erhält man $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Aus einer Lösung ergibt sich $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Mittels Punktprobe mit S erhält man $L: 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$ .

b) Länge des Schattens (2 VP)

Man berechnet die Koordinaten des Schnittpunkts F der Ebene L und der Geraden, die durch den Punkt T verläuft und den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat. Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{SF}$ ist die Länge des Schattens in Metern.

c) Verhältnis der beiden Längen (1,5 VP)

Wählt man $M(2\,|\,-3\,|\,3{,}5)$ auf der Strecke AE und N auf der Strecke EF, also $N(2+t\,|\,-3+5t\,|\,4)$ mit $0 < t < 1$, so liefert die Bedingung $|\overrightarrow{MN}| = 2{,}1$ die Gleichung $\sqrt{t^2 + 25t^2 + 0{,}25} = 2{,}1$ mit der Lösung $t = 0{,}4$.

Das gesuchte Verhältnis ist also $\frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}$.

d) Mögliche Positionen der Kletterstange (1,5 VP)

Mit $A'(2\,|\,-3\,|\,0)$ und $B'(3\,|\,2\,|\,0)$ ergeben sich z.B. $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA'} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA'} + 2 \cdot \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit sind mögliche Punkte $P_1(\frac{8}{3}\,|\,\frac{1}{3}\,|\,0)$ und $P_2(4\,|\,7\,|\,0)$ .

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer

**Aufgabe B 2**

a) Nachweis rechter Winkel (1 VP)

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -12 - 12 + 24 = 0$.

Koordinatengleichung von E (2 VP)

Aus $\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ erhält man zum Beispiel $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mittels Punktprobe mit A erhält man $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$ .

Koordinaten von D (1 VP)

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ , somit $D(0\,|\,4\,|\,6)$.

Nachweis (1 VP)

$A_{Rechteck} = \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = 6 \cdot 9 = 54$

b) Pyramidenspitze (2,5 VP)

$V = \frac{1}{3} G \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{G} = \frac{3 \cdot 108}{54} = 6$

Beispielsweise $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 6 \cdot \frac{1}{\left|\overrightarrow{n_E}\right|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , somit $S(10\,|\,5\,|\,2)$.

c) Anteil des Flächeninhaltes (2,5 VP)

A liegt in der $x_1x_2$-Ebene, B unterhalb und C oberhalb der $x_1x_2$-Ebene.
Die Strecke BC schneidet die $x_1x_2$-Ebene im Punkt $F(0\,|\,7\,|\,0)$.
Das Dreieck ABF ist rechtwinklig bei B und hat die Seitenlängen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$ und $\left|\overrightarrow{BF}\right| = 6$.
Somit hat die Teilfläche den Inhalt 18 FE.

**Aufgabe C 1**

a) Wahrscheinlichkeit für mindestens 6 nicht defekte Lampen (1 VP)

$X_1$: Anzahl der defekten Lampen, $X_1$ ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}09$.

$P(X_1 \leq 4) \approx 0{,}999$

Wahrscheinlichkeit im Zshg. mit Erwartungswert (2 VP)

$X_2$: Anzahl der defekten Lampen, $X_2$ ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0{,}09$.

$E(X_2) = 500 \cdot 0{,}09 = 45$ ,

$P(45 \cdot 0{,}9 \leq X_2 \leq 45 \cdot 1{,}1) = P(41 \leq X_2 \leq 49) = P(X_2 \leq 49) - P(X_2 \leq 40) \approx 0{,}518$

b) Wahrscheinlichkeit, dass der Händler den Karton annimmt (1,5 VP)

$\frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} \approx 0{,}634$

Maximale Anzahl der defekten Lampen (1,5 VP)

a: Anzahl der defekten Lampen, p: Wahrscheinlichkeit, dass Händler den Karton annimmt

$p(a) = \frac{30-a}{30} \cdot \frac{29-a}{29}$ , $p(8) \approx 0{,}531$ $p(9) \approx 0{,}483$

Es dürfen höchstens 8 defekte Lampen im Karton sein.

c) Mittlerer zu erwartender Gewinn (3,5 VP)

G: Gewinn in €

| Ereignis | Lampe stammt von Firma A und ist defekt | Lampe stammt von Firma A und ist intakt | Lampe stammt von Firma B und ist defekt | Lampe stammt von Firma A und ist intakt |
|---|---|---|---|---|
| k | $-0{,}98$ | $0{,}51$ | $-1{,}02$ | $0{,}47$ |
| $P(G = k)$ | $0{,}35 \cdot 0{,}09$ | $0{,}35 \cdot 0{,}91$ | $0{,}65 \cdot 0{,}07$ | $0{,}65 \cdot 0{,}93$ |

$E(G) = -0{,}98 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}09 + 0{,}51 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}91 - 1{,}02 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}07 + 0{,}47 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}93 \approx 0{,}37$

Der im Mittel pro Lampe zu erwartende Gewinn beträgt etwa 37 Cent.

**Aufgabe C 2**

a) Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A (0,5 VP)
Die Anzahl $X_1$ der 1-Personen-Haushalte ist $B_{100;0,405}$-verteilt.
$P(A) = P(X_1 = 40) \approx 0,081$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B (1 VP)
Die Anzahl $X_2$ der Mehrpersonenhaushalte ist $B_{100;0,595}$-verteilt.
$P(B) = P(X_2 \geq 50) \approx 0,978$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C (2 VP)
Die Anzahl $X_3$ der 4-Personen-Haushalte ist $B_{90;0,092}$-verteilt.
$P(C) = 0,908^{10} \cdot P(X_3 \leq 5) \approx 0,059$

b) Mindestanzahl der Haushalte (2 VP)
Die Anzahl $X_4$ der 2-Personen-Haushalte ist $B_{n;0,345}$-verteilt mit unbekanntem n.
Es soll gelten $P(X_4 > 20) \geq 0,95$.
Für n = 79 ist $P(X_4 > 20) \approx 0,948$ und für n = 80 ist $P(X_4 > 20) \approx 0,955$ .
Es hätten mindestens 80 Haushalte ausgewählt werden müssen.

c) Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte (2 VP)
Geht man vereinfachend davon aus, dass in den Haushalten mit mindestens 5 Personen genau fünf Personen leben, und bezeichnet man die Anzahl der Haushalte mit x, so gilt
$\left(1 \cdot 0,405 + 2 \cdot 0,345 + 3 \cdot 0,125 + 4 \cdot 0,092 + 5 \cdot 0,033\right) \cdot x = 80\,000\,000$.
Es ergibt sich $x \approx 40\,000\,000$.
Die Gesamtzahl der Haushalte betrug ca. 40 Millionen.

d) Hypothesentest (2,5 VP)
Die Zufallsvariable $X_5$ beschreibt die Anzahl der 1-Personen-Haushalte. Gilt die Nullhypothese $H_0: p \leq 0,405$, so ist $X_5$ im Extremfall binomialverteilt mit den Parametern n = 500 und p = 0,405. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl g mit $P(X \geq g) \leq 0,05$.
Es ist $P(X_5 \geq 221) \approx 0,051$ und $P(X_5 \geq 222) \approx 0,042$ .
Entscheidungsregel: Wenn in der Stichprobe die Anzahl der 1-Personen-Haushalte mindestens 222 beträgt, so wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.